Tentamen Lineaire Algebra, donderdag 8 april 2004

Het tentamen bestaat uit 4 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Voor een gegeven geheel getal n is $P_n(\mathbb{R})$ de vectorruimte over $\mathbb{R}$ van alle polynomen van graad hoogstens n, met reële coefficienten. Definieer de afbeelding $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ door

$$T(f(x)) := \int_0^x f(t)dt$$

- **a.** Toon aan dat T een lineaire afbeelding is
- **b.** Bepaal de nulruimte $N(T)$ van T.
- **c.** Bepaal de beeldruimte $R(T)$ van T. Wat is de rang van T?
- **d.** Toon aan dat T 1-1 (Engels: one-to-one) is.
- **e.** Ga na of T op (Engels: onto) is.
- **f.** Bepaal de matrix $[T]_\alpha^\beta$ van T ten opzichte van de bases $\alpha = \{1, x, x^2\}$ en $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$.

2. We bekijken de lineaire afbeelding $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ die gedefinieerd wordt door

$$T(a_1, a_2, a_3) := (a_2, -a_1, 2a_3)$$

- **a.** Bepaal de matrix van T ten opzichte van de standaarbasis $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ van $\mathbb{C}^3$.
- **b.** Toon aan dat T een isomorfie is.
- **c.** Bepaal het karakteristieke polynoom van T.
- **d.** Bereken de eigenwaarden van T.
- **e.** Bepaal een basis β van $\mathbb{C}^3$ zodat de matrix van T ten opzichte van β een diagonaalmatrix is.

Z.O.Z.

3. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal de rang van A.

b. Bepaal de dimensie van de nulruimte $N(A)$ van A.

c. Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel $Ax = 0$.

d. Laat de vector b gegeven zijn door

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel $Ax = b$.

4. Stel $\mathcal{V}$ een vectorruimte en $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ een lineaire afbeelding. Laat T^2 de lineaire afbeelding zijn die gedefinieerd wordt door $T^2(x) = T(T(x))$.

a. Toon aan dat $R(T^2) \subseteq R(T)$.

b. Toon aan dat $N(T) \subseteq N(T^2)$.

c. Stel dat $\operatorname{rank}(T^2) = \operatorname{rank}(T)$. Toon aan dat $N(T) = N(T^2)$.

d. Stel dat $\operatorname{rank}(T^2) = \operatorname{rank}(T)$. Toon aan dat $R(T) \cap N(T) = \{0\}$

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 24
Vraagstuk 2: 22
Vraagstuk 3: 22
Vraagstuk 4: 22